Probabilités Conditionnelles

Manipuler les formules du cours :

Exercice 0

Partie A

On donne les évènements A et B tels que P(A) = 0,2 , P(B) = 0,4 et P(A∪B) = 0,5

1. a. Calculer $P(A \cap B)$.

$$P(A \cap B)P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$
$$P(A \cap B) = 0{,}2 + 0{,}4 - 0{,}5 = 0{,}1$$

1. b. Compléter le tableau suivant à l'aide des informations de l'énoncé.

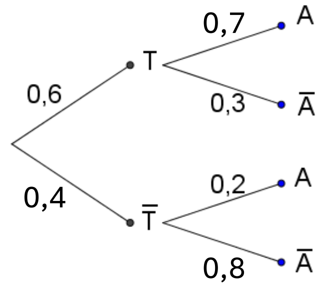
	A	$\overline{A}$	Total
B	**0,1**	0,4-0,1=**0,3**	**0,4**
$\overline{B}$	0,2-0,1=**0,1**	0,8-0,3=**0,5** ou 0,6-0,1=**0,5**	1-0,4=**0,6**
Total	**0,2**	1-0,2=**0,8**	**1**

2. Calculer $P_A(B)$, $P_B(A)$ et $P_A(\overline{B})$.

$$P_{(A)}(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0{,}1}{0{,}2} = 0{,}5$$
$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}1}{0{,}4} = 0{,}25$$

Partie B

A l'aide de l'arbre pondéré ci-contre, calculer P(A) en justifiant :



La somme des probabilités sur les branches issues d'un même nœud vaut 1 :

$P(A) = 0{,}6 \times 0{,}7 + 0{,}4 \times 0{,}2 = 0{,}5$

Exercice 1 :

Rappeler les formules permettant d'obtenir :

1) $P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A) = P_B(A) \times P(B)$

2) $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Exercice 2

Citez les formules à utiliser dans vos calculs.

On donne $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{4}$ et $P(A \cap B) = \frac{3}{16}$.

Déterminer les probabilités suivantes :

1. $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$
2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{3}{16} = \frac{1 \times 4 \times 16}{3 \times 4 \times 16} + \frac{1 \times 3 \times 16}{4 \times 3 \times 16} - \frac{3 \times 3 \times 4}{16 \times 3 \times 4} = \frac{64}{192} + \frac{48}{192} - \frac{36}{192} = \frac{76}{192} = \frac{19}{48}$
3. $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\left(\frac{3}{16}\right)}{\frac{1}{\frac{1}{3}}} = \frac{3}{16} \times \frac{3}{1} = \frac{9}{16}$
4. $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{16}}{\frac{1}{4}} = \frac{3}{16} \times \frac{4}{1} = \frac{3}{4}$
5. $P_A(\bar{B}) = 1 - P_A(B) = 1 - \frac{9}{16} = \frac{16}{16} - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$

Résoudre des problèmes classiques :

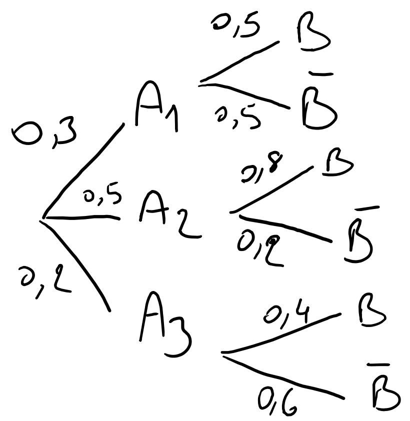
Exercice 3 : Représenter (/1,5 point), Calculer (/5 points), Communiquer (/1.5 point)

Un commerçant local se fournit chez 3 agriculteurs pour vendre des salades. 30% de ses salades viennent de l'agriculteur 1, 50% de l'agriculteur 2 et 20% de l'agriculteur 3. Les salades sont bios ou non. 50% des salades de l'agriculteur 1 sont bios, 20% des salades de l'agriculteur 2 ne sont pas bios et 40% de celles de l'agriculteur 3 sont bios.

On choisit au hasard une salade chez le commerçant local. On notera les événements suivants :

- A_1 : "la salade provient de l'agriculteur 1"
- A_2 : "la salade provient de l'agriculteur 2"
- A_3 : "la salade provient de l'agriculteur 3"
- B :"la salade est bio"

1) Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.



2) Calculer la probabilité de choisir une salade bio provenant de l'agriculteur 1.

On cherche $P(A_1 \cap B) = P(A_1) \times P_{A_1}(B)$ ← formule

$$P(A_1 \cap B) = 0{,}3 \times 0{,}5$$ ← calcul

$$P(A_1 \cap B) = 0{,}15$$

La probabilité de choisir une salade bio provenant de l'agriculteur 1 est de 0,15. ← phrase réponse

3) a) Justifier que les événements A_1, A_2et A_3 forment une partition de l'univers.

Les évènements A_1, A_2et A_3 sont deux à deux disjoints ($A_1 \cap A_2 = A_2 \cap A_3 = A_1 \cap A_3 = \emptyset$)

Les évènements A_1, A_2et A_3 forment l'univers ($A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \Omega$)

Donc A_1, A_2et A_3 forment une partition de l'univers.

b) En déduire la probabilité de choisir une salade bio.

D'après la formule des probabilités totales : ← phrase indispensable

+ formule de cours

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + P(A_3 \cap B)$$

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2) \times P_{A_2}(B) + P(A_3) \times P_{A3}(B)$$

$$P(B) = 0{,}15 + 0{,}5 \times 0{,}8 + 0{,}2 \times 0{,}4$$ ← + calculs

$$P(B) = 0{,}15 + 0{,}40 + 0{,}08$$

$$P(B) = 0{,}63$$

La probabilité de choisir une salade bio est de 0,63.

4) Calculer la probabilité de choisir une salade provenant de l'agriculteur 1 sachant que la salade est bio.

On cherche $P_B(A_1) = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)}$

$$P_B(A_1) = \frac{0{,}15}{0{,}63}$$

$$P_B(A_1) = \frac{5}{21}$$

La probabilité de choisir une salade provenant de l'agriculteur 1 sachant que la salade est bio est $\frac{5}{21}$.

5) Calculer la probabilité d'avoir une salade bio ou provenant de l'agriculteur 1.

On cherche $P(B \cup A_1) = P(B) + P(A_1) - P(B \cap A_1)$

$$P(B \cup A_1) = 0{,}63 + 0{,}3 - \frac{5}{21}$$

$$P(B \cup A_1) \approx 0{,}93 - 0{,}24$$

$$P(B \cup A_1) \approx 0{,}69$$

La probabilité d'avoir une salade bio ou provenant de l'agriculteur 1 est de 0,69.

Exercice 4

Un restaurateur propose à sa carte 2 desserts différents :

- Le premier dessert est un assortiment de macarons et est choisi par 40% des clients,
- Le 2nd dessert est une part de tarte et est choisi par 30% des clients.

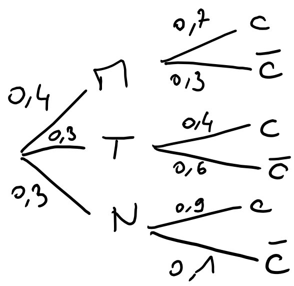
Les autres clients ne prennent pas de dessert Aucun client ne prend plusieurs desserts.

Le restaurateur a remarqué que 70% des clients qui ont pris un assortiment de macarons commandent ensuite un café, 40% de ceux qui ont pris une part de tarte demandent par la suite un café et 90% de ceux qui ne prennent pas de dessert terminent leur repas par un café.

On interroge au hasard un client et on note :

- M : « le client prend un assortiment de macarons »,
- T : « le client prend une part de tarte »,
- N : « Le client ne prend pas de dessert »,
- C : « le client prend un café ».

1) Construire un arbre de probabilité décrivant la situation.



2) Définir par une phrase les probabilités $P(T \cap C)$ et $P_M(C)$. (On ne demande pas de les calculer).

$P(T \cap C)$ est la probabilité qu'un client choisisse une part de tarte et un café.

$P_M(C)$ est la probabilité que le client choisisse un café sachant qu'il a choisi un macaron.

3) Calculer $P(T \cap C)$ puis $P(C)$.

$$P(T \cap C) = P(T) \times P_T(C)$$
$$P(T \cap C) = 0{,}3 \times 0{,}4$$
$$P(T \cap C) = 0{,}12$$

$M, T\ et\ N$ forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(C) = P(M \cap C) + P(T \cap C) + P(N \cap C)$$
$$P(C) = P(M) \times P_M(C) + P(T \cap C) + P(N) \times P_N(C)$$
$$P(C) = 0{,}4 \times 0{,}7 + 0{,}12 + 0{,}3 \times 0{,}9$$
$$P(C) = 0{,}28 + 0{,}12 + 0{,}27$$
$$P(C) = 0{,}67$$

4) On rencontre un client ayant pris un café. Quelle est la probabilité qu'il ait commandé une part de tarte ? On donnera le résultat sous forme d'une fraction irréductible.

On cherche $P_C(T)$:

$$P_C(T) = \frac{P(T \cap C)}{P(C)}$$

$$P_C(T) = \frac{0{,}12}{0{,}67}$$
$$P_C(T) = \frac{12}{67}$$

La probabilité qu'un client ait commandé une part de tarte sachant qu'il a ris un café est de $\frac{12}{67}$.

<u>Exercice 5</u>

Une entreprise financière est divisée en deux secteurs :

- 65% de son personnel travaille dans le secteur A;
- 35% dans le secteur B.

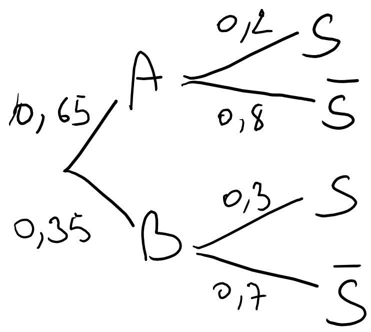
Cette entreprise s'intéresse au niveau du stress de son personnel.

Une enquête, menée sous forme de questionnaire informatisé, est réalisé au sein de l'entreprise. Le questionnaire est proposé de manière anonyme aux salariés des deux secteurs. Cette enquête révèle que pour le secteur A, 20% du personnel se dit stressé tandis que pour le secteur B, ce taux est de 30%.

On choisit au hasard le questionnaire d'un employé de l'entreprise, chacun ayant la même probabilité d'être choisi. On note :

- A l'événement « le questionnaire est celui d'un employé du secteur A. »
- B l'événement « le questionnaire est celui d'un employé du secteur B. »
- S l'événement « le questionnaire est celui d'un employé stressé. »

1) Construire un arbre pondéré décrivant la situation.



2) Calculer la probabilité que le questionnaire choisi soit celui d'un employé qui travaille dans le secteur B et qui est stressé.
On cherche $P(B \cap S)$

$$P(B \cap S) = P(B) \times P_B(S)$$
$$P(B \cap S) = 0{,}35 \times 0{,}3$$
$$P(B \cap S) = 0{,}105$$

La probabilité que le questionnaire choisi soit celui d'un employé qui travaille dans le secteur B et qui est stressé est de 0,105.

3) L'entreprise examine l'opportunité d'installer une salle de relaxation. Si le taux d'employés stressés est strictement supérieur à 25%, la salle sera installée. L'entreprise implantera-t-elle la salle de relaxation ? Justifier la réponse.

On cherche à savoir si $P(S) > 0{,}25$.
$A\ et\ B$ forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(S) = P(A \cap S) + P(B \cap S)$$
$$P(S) = P(A) \times P_A(S) + P(B \cap S)$$
$$P(S) = 0{,}65 \times 0{,}2 + 0{,}105$$
$$P(S) = 0{,}13 + 0{,}105$$
$$P(S) = 0{,}235$$

La probabilité qu'un employé soit stressé est inférieure à 0,25 donc la salle de relaxation ne sera pas installée.

4) Le questionnaire choisi est celui d'un employé stressé. Quelle est la probabilité qu'il travaille dans le secteur A ? Arrondir au centième.
On cherche $P_S(A)$:

$$P_S(A) = \frac{P(A \cap S)}{P(S)}$$

$$P_S(A) = \frac{0{,}105}{0{,}235}$$

$$P_S(A) = \frac{21}{47}$$
$$P_S(A) \approx 0{,}447$$

La probabilité qu'un employé travaille dans le secteur A sachant qu'il est stressé est de 0,447.

5) Athénaïs, employée par cette entreprise, a deux méthodes de relaxation. Le choix de ces deux méthodes est indépendant l'une de l'autre. On note :

- E l'événement « Athénaïs fait du coloriage. »
- F l'événement « Athénaïs pratique une séance de yoga. »

Elle choisit la méthode de relaxation par le yoga avec une probabilité de $P(F) = \frac{2}{5}$

La probabilité qu'elle fasse les deux est de $\frac{1}{10}$.

Déterminer alors la probabilité qu'Athénaïs choisisse le coloriage.

Les évènements E et F sont indépendants donc $P(E \cap F) = P(E) \times P(F)$

Ainsi $P(E) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$

$$P(E) = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{2}{5}} = \frac{1}{10} \times \frac{5}{2} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$

La probabilité qu'Athénaïs choisisse le coloriage est de $\frac{1}{4}$

<u>Croisons les notions :</u>

<u>Exercice 6</u>

Les probabilités demandées seront données à 10^{-3} près.

Pour aider à la détection de certaines allergies, on peut proceder à un test sanguin dont le résultat est soit positif, soit négatif. Dans une population, ce test donne les résultats suivants :

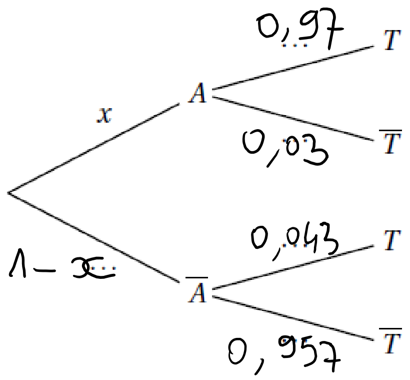
- Si un individu est allergique, le test est positif dans 97% des cas;
- Si un individu n'est pas allergique, le test est négatif dans 95,7% des cas.

Par ailleurs, 20% des individus de la population concernée présentent un test positif. On choisit au hasard un individu dans la population, et on note:

- A l'événement « l'individu est allergique»;
- T l'événement « l'individu présente un test positif. »

On notera $\bar{A}$ et $\bar{T}$ les événements contraires de A et T. On appelle par ailleurs x la probabilité de l'événement A : $x = P(A)$.

1) Compléter l'arbre ci-dessous décrivant la situation.



2) a) Démontrer l'égalité : $P(T) \ = \ 0\,,927x + 0.043$

Les évènements $A\ et\ \bar{A}$ forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(T) = P(A \cap T) + P(\bar{A} \cap T)$$
$$P(T) = P(A) \times P_A(T) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(T)$$
$$P(T) = x \times 0{,}97 + (1 - x) \times 0{,}043$$
$$P(T) = 0{,}97x + 0{,}043 - 0{,}043x$$
$$P(T) = 0{,}927x + 0{,}043$$

b) En déduire la probabilité que l'individu choisi soit allergique.

La probabilité que l'individu choisi soit allergique est $P(A) = x$.

D'après l'énoncé, 20% de la population présente un test positif ainsi :

$P(T) = 0{,}2.$

$\Leftrightarrow 0{,}927x + 0{,}043 = 0{,}2$

$\Leftrightarrow 0{,}927x = 0{,}157$

$\Leftrightarrow x \approx 0{,}169$

La probabilité qu'un individu soit allergique est de 0,169.

3) Justifier par un calcul l'affirmation suivante « Si le test d'un individu choisi au hasard est positif, il y a plus de 80% de chances que cet individu soit allergique ».

On cherche $P_T(A)$

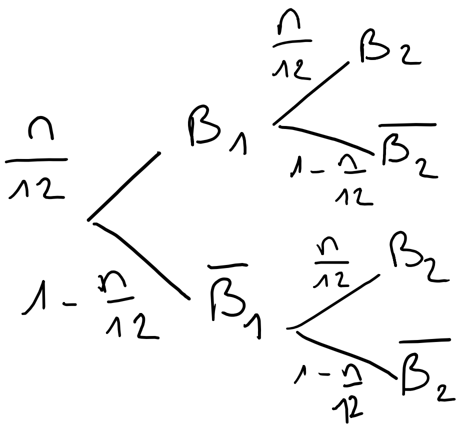
$$P_T(A) = \frac{P(A \cap T)}{P(T)}$$
$$P_T(A) = \frac{0{,}97 \times 0{,}169}{0{,}2}$$
$$P_T(A) \approx 0{,}820$$

Si le test d'un individu choisi au hasard est positif, il y a plus de 80% de chances que cet individu soit allergique.

Exercice 7

Une urne contient 12 boules indiscernables au toucher dont n bleues.
On tire successivement deux boules au hasard avec remise. On nomme B_1 l'évènement « Tirer une boule bleue lors du premier tirage » et B_2 l'évènement « Tirer une boule bleue lors du deuxième tirage ».
1. Pourquoi s'agit-il d'une succession de deux épreuves indépendantes ?
Les boules sont indiscernables au touché et les boules sont remises dans l'urne à chaque tirage.

2. Dresser un arbre pondéré de cette situation.



3. Démontrer que la probabilité d'obtenir au moins une boule bleue est $\frac{24n-n^2}{144}$.

La probabilité d'obtenir au moins une boule bleue est la somme des probabilités d'obtenir une boule bleue et d'obtenir 2 boules bleues :

$$P(B_1 \cap B_2) + P(B_1 \cap \overline{B_2}) + P(\bar{B}_1 \cap B_2) = \frac{n}{12} \times \frac{n}{12} + \frac{n}{12} \times \left(1 - \frac{n}{12}\right) + \left(1 - \frac{n}{12}\right) \times \frac{n}{12}$$

$$P(B_1 \cap B_2) + P(B_1 \cap \overline{B_2}) + P(\bar{B}_1 \cap B_2) = \frac{n^2}{144} + \frac{n}{12} - \frac{n^2}{144} + \frac{n}{12} - \frac{n^2}{144}$$

$$P(B_1 \cap B_2) + P(B_1 \cap \overline{B_2}) + P(\bar{B}_1 \cap B_2) = \frac{2n}{12} - \frac{n^2}{144}$$

$$P(B_1 \cap B_2) + P(B_1 \cap \overline{B_2}) + P(\bar{B}_1 \cap B_2) = \frac{24n - n^2}{144}$$

On peut aussi passer par l'évènement contraire « tirer aucune boule bleue » et calculer :

$$1 - P(\bar{B}_1 \cap \bar{B}_2) = 1 - \left(1 - \frac{n}{12}\right)^2$$

4. Combien doit-il y avoir de boules bleues dans l'urne pour que la probabilité d'obtenir au moins une boule bleue soit égale à $\frac{8}{9}$?

On résout :

$$\frac{24n-n^2}{144} = \frac{8}{9}$$

$$\Leftrightarrow \frac{24n-n^2}{144} = \frac{8\times16}{9\times16}$$

$$\Leftrightarrow \frac{24n-n^2}{144} = \frac{128}{144}$$

$\Leftrightarrow 24n - n^2 = 128$
$\Leftrightarrow n^2 - 24n + 128 = 0$

$$\Delta = (-24)^2 - 4 \times 1 \times 128$$
$$\Delta = 64$$

$\Delta > 0$ donc l'équation $n^2 - 24n + 128 = 0$ admet 2 solutions :
$n_1 = \frac{24-\sqrt{64}}{2} = \frac{24-8}{2} = 8$ et $n_2 = \frac{24+8}{2} = 16$

Comme il n'y a que 12 boules dans l'urne, on en conclut qu'il faut 8 boules bleues dans l'urne pour que la probabilité d'en tirer au moins une soit de $\frac{8}{9}$.